数理解析研究所講究録 1455 巻 2005 年 145-151

半群と $L^\infty(G)$ の部分環の対応とその応用

鶴岡高専・総合科学科　大和田 智義 (Tomoyoshi Ohwada)
Department of General Science,
Tsuruoka National College of Technology

1 序

可換なコンパクト群 G 上の Lebesgue 空間 $L^\infty(G)$ はヒルベルト空間 $L^2(G)$ 上の可換な von Neumann 環として良く知られていて, その非可換な拡張として接合積がある. 実際に接合積は von Neumann 環 N とその自己同型群 $\alpha=\{\alpha_g\}_{g\in G}$ によって与えられるが, 特に任意の $g\in G$ に対して α_g が N のユニタリ作用素 u_g によって $\alpha_g(x)=u_gxu_g^*$ $(\forall x\in N)$ と与えられるとき α は内部的であるといい, このとき接合積は N と $L^\infty(G)$ のテンソル積 $N\otimes L^\infty(G)$ と同型である.

近年, 我々は接合積の部分環のなかでも特にハーディ環 $H^\infty(G)$ の非可換な拡張である解析的接合積と呼ばれる部分環に関連した構造解析を精力的に行ってきた. (cf. [5–7]) 解析的接合積は, 接合積と同様にそれを与える自己同型群 α が内部的である場合, von Neumann 環 N と $H^\infty(G)$ のテンソル積 $N\otimes H^\infty(G)$ と同型であることに注意しておく. その一連の研究を通じて, 接合積の部分環と G の双対群 $\hat{G}$ の半群との間になんらかの対応が存在するのではないかといった疑問が生じ, 半群の性質を利用した接合積の部分環の極大性の研究へとつながった. ここではその結果を関数環の設定で説明することを目的とする. 先ずはこの研究の動機付けとなった幾つかの事実を上げる. つぎに半群から定義される $L^\infty(G)$ のスペクトル部分環を定義してスペクトル部分環と半群との間の一対一対応を確立するとともに, その応用として $L^\infty(G)$ の部分環の極大性を論ずる.

2 背景

簡単のために $G=\mathbb{T}$ として考えると, その双対群 $\hat{G}$ は $\mathbb{Z}$ である. 一般に群 G の部分集合 Γ が条件 $\Gamma+\Gamma\subseteq\Gamma$ をみたすとき, **Γ は G の半群である**というが, $\mathbb{Z}_+=\{0,1,2,\cdots\}$ とすれば明らかに $\mathbb{Z}_++\mathbb{Z}_+\subseteq\mathbb{Z}_+$ であるので $\mathbb{Z}_+$ は $\mathbb{Z}$ の半群である. $L^\infty(\mathbb{T})$ の元 f のフーリエ変換を $\hat{f}$ とかき, その台を $\mathrm{supp}\hat{f}$ とかく. すなわち $\mathrm{supp}\hat{f}=\{n\in\mathbb{Z}:\hat{f}(n)\neq 0\}$ である. このときハーディ環 $H^\infty(\mathbb{T})$ は良く知られているように, フーリエ変換の台が $\mathbb{Z}_+$ に含ま

れる $L^\infty(\mathbb{T})$ の元全体である．すなわち

$$H^\infty(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{T}) \mid \mathrm{supp}\hat{f} \subseteq \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

同様に $L^\infty(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{T}) \mid \mathrm{supp}\hat{f} \subseteq \mathbb{Z} \right\}$ かつ $\mathbb{C} = \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{T}) \mid \mathrm{supp}\hat{f} \subseteq \{0\} \right\}$ と表すことが出来るので以下のような対応を得ることが出来る．

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \mathbb{C} & \subseteq & H^\infty(\mathbb{T}) & \subseteq & L^\infty(\mathbb{T}) \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \text{(maximal)} & & \Updownarrow \\ \{0\} & \subseteq & \mathbb{Z}_+ & \subseteq & \mathbb{Z} \end{array}}$$

ここで注目すべき点は上のラインでは $H^\infty(\mathbb{T})$ が $\mathbb{C}$ を含む $L^\infty(\mathbb{T})$ の弱- $*$ 閉部分環として極大であるのに対して，下のラインでは $\mathbb{Z}_+$ が $\{0\}$ を含む $\mathbb{Z}$ の半群として極大となっていることである．また我々は [5] で接合積の σ-弱閉部分環の極大性に関して研究を行い，解析的接合積が接合積の σ-弱閉部分環として極大であるための必要十分条件を，$\hat{G}$ の半群の性質に結び付けて与えている．これらの事実から一般の設定で，次の問題を考えた．

問題 2.1 $L^\infty(\mathbb{T})$ の $\mathbb{C}$ を含む弱- $*$ 閉部分環と $\hat{G}$ の $\{\hat{0}\}$ を含む半群との間になんらかの対応は存在するのか？もしその対応が存在する場合，その対応を利用した極大性の議論は可能か？

勿論，これまでに多くの解析的接合積の極大性に関する研究がなされてきたが，そのアイデアは全て (次章で定義する) アルキメデス的順序を引き起こす半群を固定したうえで，不変部分空間の理論を用いて展開されている．(cf. [3, 4, 8–10]) ここでは半群の性質に着目するといった全く異なるアプローチにより部分環の構造解析および極大性を考察する．

3　半群とスペクトル部分環

この章では，以後の議論に必要な幾つかの定義と準備を行う．ここでは常に G を可換なコンパクト群としその双対群を $\hat{G}$ で表すことにする．

定義 3.1 $\hat{G}$ の部分集合 Γ が条件 $\Gamma + \Gamma \subseteq \Gamma$ を満たすとき，**Γ を $\hat{G}$ の半群**という

2 章でも述べたとおり $\mathbb{Z}$ の半群として $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$ は最も基本的な例を与えるが，実際には $\mathbb{Z}$ の半群に関して次の結果が知られている．

定理 3.2 (cf. [14, 定理 3.4.5]) $\mathbb{Z}$ の自明でない半群は次のいずれか一つに同型である．

(i) 正の整数全体からなる半群 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$

(ii) 正の整数全体に 0 を付け加えた半群 $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$

(iii) 整数全体からなる半群 $\mathbb{Z}$

このことより直ちに $\mathbb{Z}_+$ は $\{0\}$ を含む $\mathbb{Z}$ の極大な半群であることがわかる.

次にスペクトル部分環を定義する. von Neumann 環 $L^\infty(\mathbb{T})$ を M とかき M の元 f のフーリエ変換を $\hat{f}$ で表わすとき $\hat{f}$ の台 $\{\hat{h} \in \hat{G} : \hat{f}(\hat{h}) \neq 0\}$ を $\mathrm{supp}\hat{f}$ とかく. このとき

定義 3.3 M の任意の元 f に対して $\mathrm{supp}\hat{f}$ を f のスペクトルとよび, $\hat{G}$ の任意の部分空間 E に対して M の E に関するスペクトル部分空間 $M(E)$ を

$$M(E) = \left\{ f \in M \mid \mathrm{supp}\hat{f} \subseteq E \right\}$$

により定義する. 特に E が $\hat{G}$ の半群であるとき $M(E)$ は M の弱 $*$-閉部分環であり, それを **M の半群 E によるスペクトル部分環**とよぶ.

補題 3.4 $\hat{G}$ の半群 Γ, Σ に関して以下の条件は同値である.

(i) $M(\Gamma) \subsetneq M(\Sigma)$

(ii) $\Gamma \subsetneq \Sigma$

この補題により, 任意に一つ半群 Γ をとれば, それに対して一意に M の弱-$*$ 閉部分環としてスペクトル部分環 $M(\Gamma)$ が対応しその逆も成立する. そこでいつ M の弱-$*$ 閉部分環がスペクトル部分環として表現できるかは興味深い問題である. M の任意の元 f に関して

$$\alpha_k(f)(g) = f(g+k) \qquad (\forall g, k \in G) \tag{1}$$

とすれば $\alpha = \{\alpha_k\}_{k \in G}$ は M の自己同型群である. このとき, この問題に関して次の定理を得た.

定理 3.5 $M = L^\infty(G)$ とし α を上で与えた自己同型群とする. このとき M の $\mathbb{C}$ を含む弱-$*$ 閉部分環 $\mathfrak{A}$ が α に関して不変, すなわち $\alpha_k(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$ $(\forall k \in G)$ を満たすなら, $\hat{G}$ の $\hat{0}$ を含む半群 Γ が存在して $\mathfrak{A} = M(\Gamma)$ となる.

この定理より直ちに M の $\mathbb{C}$ を含む弱-$*$ 閉部分環と $\hat{G}$ の単位元 $\hat{0}$ を含む半群との間に一対一対応がつくことがわかる.

von Neumann 環の $*$-部分環に対する Galois 対応の研究は今日でも様々な設定のもとで研究が進んでいるが, 定理 3.5 の系として同様の Galois 対応を得ることが出来る.

系 3.6 M の $\mathbb{C}$ を含む弱-$*$ 閉な $*$ 部分環 $\mathfrak{B}$ が α に関して不変, すなわち $\alpha_k(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}$ $(\forall k \in G)$ を満たすなら, $\hat{G}$ の $\hat{0}$ を含む部分群 Γ が存在して $\mathfrak{A} = M(\Gamma)$ となる. すなわち M の $\mathbb{C}$ を含む弱-$*$ 閉な $*$ 部分環と $\hat{G}$ の $\hat{0}$ を含む部分群の間には一対一対応が存在する.

4　極大性

この章では定理 3.5 の応用として $L^\infty(\mathbb{T})$ の部分環の極大性の問題を考察する．そのためには幾つかの準備が必要である．

定義 4.1 $\mathfrak{A}$ を *von Neumann* 環 M の弱-$*$ 閉部分環としたとき，$\mathfrak{A}$ を真に含む M の弱-$*$ 閉部分環は M だけであるとき **$\mathfrak{A}$ を M の極大な弱-$*$ 閉部分環**という．

極大な部分環の例としては以下のものがよく知られている．

例 4.2 可換なコンパクト群 $G = \mathbb{T}$ の双対群は $\hat{G} = \mathbb{Z}$ である．このとき半群 $\mathbb{Z}_+$ に対する M のスペクトル部分環 $M(\mathbb{Z}_+)$ はハーディ環 $H^\infty(\mathbb{T})$ と一致する．すなわちスペクトル部分環 $M(\mathbb{Z}_+)$ は M の $\mathbb{C}$ を含む弱-$*$ 閉部分環として極大である．

例 4.2 における半群 $\mathbb{Z}_+$ はある特徴的な半群の性質

$$\mathbb{Z}_+ \cup (-\mathbb{Z}_+) = \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}_+ \cap (-\mathbb{Z}_+) = \{0\}$$

を備えている．それは今後の議論にも重要な役割を果たす興味深いものである．

定義 4.3 G を可換なコンパクト群とし $\hat{G}$ をその双対群とする．このとき $\hat{G}$ の半群 $\hat{G}_+$ が条件

$$\hat{G}_+ \cup (-\hat{G}_+) = \hat{G}, \quad \hat{G}_+ \cap (-\hat{G}_+) = \{\hat{0}\} \tag{2}$$

をみたすとき **$\hat{G}_+$ を $\hat{G}$ の正半群**とよぶ．

実際にこの条件 (2) を満たすとき任意の $x, y \in \hat{G}$ に対して関係 $x \geq y$ を $x - y \in \hat{G}_+$ により定義すれば $\hat{G}_+$ は $\hat{G}$ に全順序を引き起こす．正半群の選び方により様々な種類の順序が存在する．重要な順序の例としてアルキメデス的順序がある．

定義 4.4 $\hat{G}_+$ を $\hat{G}$ の正半群とする．$\hat{G}_+$ の $\hat{0}$ でない任意の元 x, y に対してある正整数 n が存在して $nx > y$ となるとき **$\hat{G}_+$ が $\hat{G}$** に引き起こす順序を**アルキメデス的順序**といい，このとき **$\hat{G}_+$ は $\hat{G}$ にアルキメデス的順序を引き起こす**という．

例 4.2 において $\mathbb{Z}_+$ は明らかに $\mathbb{Z}$ にアルキメデス的順序を引き起こす．また定理 3.2 より $\mathbb{Z}$ の正半群は $\mathbb{Z}_+$ だけであることも直ぐにわかるので $\mathbb{Z}$ の正半群が引き起こす順序はアルキメデス的順序だけである．しかし $\mathbb{Z}^2$ ではその事情もだいぶ異なるようである．実際にアルキメデス的順序ではない順序が $\mathbb{Z}^2$ に以下のように導入される．

例 4.5 $G = \mathbb{T}^2$ の双対群 $\hat{G} = \mathbb{Z}^2$ に対して，$\hat{G}_+$ を

$$\hat{G}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \left\{(k, l) \in \mathbb{Z}^2 \mid k = 0 \text{ かつ } l \geq 0, \text{ または } k > 0\right\}$$

と定義すれば $\hat{G}_+$ は明らかに

$$\hat{G}_+ \cup (-\hat{G}_+) = \hat{G}, \quad \hat{G}_+ \cap (-\hat{G}_+) = \{(0, 0)\}$$

をみたすので正半群である．しかしながら $\hat{G}_+$ の元 $(1,0),(0,1)$ をとれば，任意の正整数 n に対して

$$n(0,1)-(1,0)=(-1,n)\notin\hat{G}_+$$

である．(図 1 を参照) すなわち $\hat{G}_+$ はアルキメデス的でない順序を $\hat{G}$ に引き起こす．この

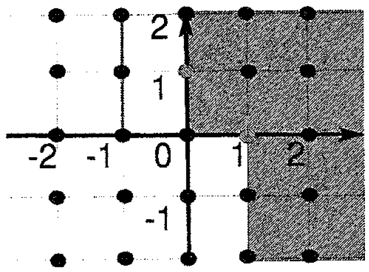

図 1: アルキメデス的順序でない例

$\hat{G}_+$ によって導入される順序は *lexicographic* 順序と呼ばれている．

さてここでふたたび極大性の問題に戻ることにする．定義 4.3 から任意の正半群 $\hat{G}_+$ に対して，一般のコンパクト群 G に関するハーディ環 $H^\infty(G)$ が次の形で定義される．

$$H^\infty(G)\stackrel{\mathrm{def}}{=}M(\hat{G}_+)=\left\{f\in M\mid \mathrm{supp}\hat{f}\subseteq\hat{G}_+\right\}$$

このとき $H^\infty(\mathbb{T})$ が $L^\infty(\mathbb{T})$ の弱-* 閉部分環として極大であるように $H^\infty(G)$ がいつ $L^\infty(G)$ の弱-* 閉部分環として極大であるかは興味深い問題である． 実際に全てのハーディ環 $H^\infty(G)$ が極大であるわけではない．

例 4.6 例 *4.5* のように $G=\mathbb{T}^2$ の双対群 $\hat{G}=\mathbb{Z}^2$ に対して，$\hat{G}_+$ を

$$\hat{G}_+=\left\{(k,l)\in\mathbb{Z}^2\mid k=0\text{ かつ }l\geq 0,\ \text{ または }k>0\right\}$$

により与えると $\hat{G}_+$ は $\hat{G}$ の正半群である．また $\Gamma\stackrel{\mathrm{def}}{=}\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+$ とすれば Γ は $\hat{G}$ の半群であり，

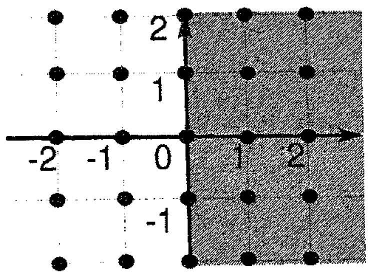

図 2: 極大でない例

明らかに $\hat{G}_+ \subsetneq \Gamma$ である. (図 2 参照) このとき補題 *3.4* より $H^\infty(G) = M^\alpha(\hat{G}_+) \subsetneq M^\alpha(\Gamma)$ である. すなわちハーディ環 $H^\infty(G)$ は極大ではない.

例 4.6 からハーディ環 $H^\infty(G)$ の極大性は $\hat{G}$ の正半群の性質と密接な関係にあると推測される. 実際に我々は [5] で次の結果を得た.

定理 4.7 ([5, Theorem 3.7]) G を可換なコンパクト群とし $\hat{G}_+$ をその双対群の正半群とする. このとき $M^\alpha(\hat{G}_+)$ が弱 $*$-閉部分環として極大であるならば, $\hat{G}_+$ は $\hat{G}$ にアルキメデス的順序を引き起こす.

ここでは定理 4.7 の逆の問題, すなわち正半群 $\hat{G}_+$ が $\hat{G}$ にアルキメデス的順序を引き起こすなら, ハーディ環 $H^\infty(G) = M^\alpha(\hat{G}_+)$ は弱 $*$-閉部分環として極大であるかを考え, 定理 3.5 の応用としてその完全な解答を与える. 定理 3.5 をつかうためには (1) で定義した自己同型群 α に関する部分環の不変性が必要である. Solel により次の結果が得られている.

命題 4.8 ([9, Proposition 5.1]) G を可換なコンパクト群としその双対群を $\hat{G}$ とする. $\hat{G}_+$ を $\hat{G}$ にアルキメデス的順序を引き起こす正半群とすれば, $M^\alpha(\hat{G}_+)$ を含む全ての M の弱-$*$ 閉部分環 $\mathfrak{B}$ は自己同型群 α に関して不変である. すなわち $\alpha_g(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}$ $(\forall g \in G)$ である.

補題 3.4, 定理 3.5 および命題 4.8 より直ちに定理 4.7 の逆もいえるので目標であった次の結果を得ることができる.

定理 4.9 G を可換なコンパクト群とし $\hat{G}_+$ をその双対群の正半群とする. このとき $M^\alpha(\hat{G}_+)$ が弱 $*$-閉部分環として極大であることと $\hat{G}_+$ が $\hat{G}$ にアルキメデス的順序を引き起こすことは同値である.

参考文献

[1] W. B. Arveson, *Analyticity in operator algebras,* Amer. J. Math. **89** (1967), 578–642.

[2] R. I. Loebl and P. S. Muhly, *Analyticity and flows in von Neumann algebras.* J. Funct. Anal. **29** (1978), 214–252.

[3] M. McAsey, P. S. Muhly and K-S. Saito, *Non-selfadjoint crossed products* (Invariant subspaces and maximality). Trans. Amer. Math. Soc. **248** (1979), 381–409.

[4] M. McAsey, P. S. Muhly and K-S. Saito, *Non-selfadjoint crossed products III.* J. Operator Theory **12** (1984), 3–22.

[5] T. Ohwada, G. Ji, A. Hasegawa and K-S. Saito, *A note on maximality of analytic crossed products.* J. Math. Anal. Appl. (to appear).

[6] T. Ohwada, *On some subalgebras of von Neumann algebras with analyticity.* J. Funct. Anal. **222** (2005), 274–291.

[7] T. Ohwada, *The correspondence between semigoups and certain subalgebras of a crossed product.* preprint.

[8] K-S. Saito, *Invariant subspaces and cocycles in nonselfadjoint crossed products.* J. Funct. Anal. **45** (1982), 177–193.

[9] B. Solel, *Nonselfadjoint crossed products: Invariant subspaces, cocycles and subalgebras.* Indiana Univ. Math. J. **34** (1985), 277–298.

[10] B. Solel, *Maximality of analytic operator algebras.* Israel J. Math. **62** (1988), 63–89.

[11] S. Strătilă, *Modular theory in operator algebras.* Abacus Press, Tunbridge, England (1981).

[12] M. Takesaki, *Theory of operator algebras I.* Springer-Verlag, Berlin (2002).

[13] M. Takesaki, *Theory of operator algebras II.* Springer-Verlag, Berlin (2003).

[14] 田村孝行, 半群論. 共立出版 (2001).